

# **MATEMATICĂ**

## **CLASA a VIII-a**

- **Formule**
- **Exerciții recapitulative**
- **Modele de teste  
cu rezolvări pentru  
Evaluarea Națională**

# Cuprins

Enunțuri Soluții

## Capitolul 1. MEMORATOR DE MATEMATICĂ

### A. ARITMETICĂ – ALGEBRĂ

A.1. Numere naturale. Operații cu numere naturale.....	3
A.2. Numere întregi.....	5
A.3. Divizibilitatea numerelor întregi.....	6
A.4. Numere raționale. Frații ordinare. Frații zecimale.....	9
A.5. Rapoarte. Proportii. Procente. Probabilități.....	11
A.6. Radicali. Numere reale.....	12
A.7. Formule de calcul prescurtat. Descompunere în factori.....	15
A.8. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Expresii algebrice.....	15
A.9. Funcții.....	16
A.10. Ecuații. Inecuații. Sisteme de ecuații. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor (inecuațiilor) sau al sistemelor de ecuații (inecuații).....	17

### B. GEOMETRIE PLANĂ. GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

B.1. Unghiuri. Triunghiuri.....	20
B.2. Patrulater.....	26
B.3. Asemănare.....	28
B.4. Relații metrice.....	30
B.5. Cercul.....	32
B.6. Incidență, paralelism și perpendicularitate în spațiu.....	35
B.7. Corpuri geometrice. Arii și volume.....	42

## Capitolul 2. TEME RECAPITULATIVE. APLICAȚII

### ARITMETICĂ – ALGEBRĂ

2.1. Numere naturale. Operații cu numere naturale.....	47	236
2.2. Numere întregi.....	49	237
2.3. Divizibilitate.....	51	238
2.4. Numere raționale.....	53	239
2.5. Rapoarte. Proportii. Probabilități.....	56	241
2.6. Numere reale. Radicali.....	59	243
2.7. Formule de calcul prescurtat.....	62	245
2.8. Calcul algebric.....	64	246
2.9. Funcții.....	66	247
2.10. Ecuații. Sisteme de ecuații. Inecuații.....	68	249

## **GEOMETRIE**

2.11. Unghiuri. Triunghiuri .....	70	251
2.12. Patrulater.....	72	252
2.13. Asemănare .....	74	254
2.14. Relații metrice .....	76	257
2.15. Elemente de trigonometrie. Aree .....	78	259
2.16. Cercul .....	80	262
2.17. Incidență. Paralelism. Perpendicularitate .....	81	264
2.18. Poliedre. Aree. Volume .....	84	267
2.19. Corpuri rotunde. Aree. Volume .....	87	269

### **Capitolul 3. MODELE DE TESTE CU REZOLVARE COMPLETĂ .....90**

### **Capitolul 4. 40 DE MODELE DE TESTE PROPUSE ..... 136 271**

# Capitolul 1

## MEMORATOR DE MATEMATICĂ

### A. ARITMETICĂ – ALGEBRĂ

#### A.1. Numere naturale. Operații cu numere naturale

- **Mulțimea numerelor naturale** este  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Cu numere naturale se pot efectua următoarele operații:

- operații de ordinul I: adunarea și scăderea;
- operații de ordinul II: înmulțirea și împărțirea;
- operații de ordinul III: ridicarea la putere.

- **Proprietățile adunării și înmulțirii numerelor naturale:**

1. comutativitatea:  $a + b = b + a$ ;

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{N};$$

2. asociativitatea:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{N};$$

3. 0 este element neutru pentru de adunare:  $a + 0 = 0 + a = a$ , pentru orice  $a \in \mathbb{N}$ ;

1 este element neutru pentru de înmulțire:  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ , pentru orice  $a \in \mathbb{N}$ ;

4. distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere (la stânga, respectiv la

$$\text{dreapta}): a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a;$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c. \quad (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a.$$

- **Compatibilitatea operațiilor cu numere naturale în raport cu egalitatea/inegalitatea:**

Avem  $a > b$  (sau  $b < a$ ) dacă există  $c$  astfel încât  $a = b + c$ .

Avem  $a \leq b$  (sau  $b \geq a$ ) dacă există  $c$  astfel încât  $b = a + c$ .

a) Egalitatea  $a = b$  între două numere naturale se păstrează dacă:

- în ambii membri se adună același număr natural:  $a + c = b + c$ ;

- din ambii membri se scade același număr natural:  $a - c = b - c$ ;

- ambii membri se înmulțesc cu același număr natural:  $a \cdot c = b \cdot c$ ;

- ambii membri se împart la același număr natural:  $a : c = b : c$ .

b) Dacă adunăm sau înmulțim membru cu membru două egalități, egalitatea se păstrează:  $a = b, c = d \Rightarrow a + c = b + d; a \cdot c = b \cdot d$ .

c) Inegalitatea  $a < b$  între două numere naturale se păstrează dacă:

- în ambii membri se adună același număr natural:  $a + c < b + c$ ;

- din ambii membri se scade același număr natural:  $a - c < b - c$ ;

- ambii membri se înmulțesc cu același număr natural nenul:  $a \cdot c < b \cdot c$ ;

- ambii membri se împart la același număr natural nenul:  $a : c < b : c$ .

**Observație:** Dacă avem  $a \leq b$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ , atunci:

$$a + c \leq b + c; a - c \leq b - c; a \cdot c \leq b \cdot c, \text{ pentru } c \in \mathbb{N}; a : c \leq b : c, \text{ pentru } c \in \mathbb{N}^*.$$

• **Teorema împărțirii cu rest**

Pentru orice numere naturale  $a$  și  $b$ , cu  $b \neq 0$ , există și sunt unice numerele naturale  $q$  și  $r$ , astfel încât:  $a = b \cdot q + r$  și  $0 \leq r < b$ .

Numerele  $q$  și  $r$  se numesc câtul și restul împărțirii numărului  $a$  (numit deîmpărțit) la numărul  $b$  (numit împărțitor).

**Observație:** Pentru orice  $a \in \mathbb{N}$  nu are sens operația  $a : 0$ , iar  $a \cdot 0 = 0$ .

• **Puterea cu exponent natural a unui număr natural**

Fie  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ . Puterea a  $n$ -a a numărului natural  $a$  este produsul a  $n$  factori egali cu  $a$ . Avem:  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ ;  $a^1 = a$ ;  $a^0 = 1$ .

Dacă  $a = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $a^n = 0^n = 0$ . Operația  $0^0$  nu are sens.

• **Pătratele perfecte** sunt numerele de forma  $a^2$ ,  $a \in \mathbb{N}$  (adică 0, 1, 4, 9, 16, 25, ...).

**Cuburile perfecte** sunt numerele de forma  $a^3$ ,  $a \in \mathbb{N}$  (adică 0, 1, 8, 27, 64, 125, ...)

• **Ultima cifră a puterii**  $n \in \mathbb{N}^*$  a unui număr  $a \in \mathbb{N}$ :

- dacă  $a \in \{0, 1, 5, 6\}$ , atunci  $u(a^n)$  se termină cu aceeași cifră;

- dacă  $a = 4$ , atunci  $u(4^n) = \begin{cases} 6, & n \text{ par} \\ 4, & n \text{ impar} \end{cases}$ ;

- dacă  $a = 9$ , atunci  $u(9^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 9, & n \text{ impar} \end{cases}$ ;

- dacă  $a \in \{2, 3, 7, 8\}$ , ultima cifră a puterilor nenule se repetă din 4 în 4, astfel:

	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$a = 2$	6	2	4	8
$a = 3$	1	3	9	7
$a = 7$	1	7	9	3
$a = 8$	6	8	4	2

• **Reguli de calcul cu puteri** ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ):

- înmulțirea puterilor cu aceeași bază:  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;

- împărțirea puterilor cu aceeași bază:  $a^m : a^n = a^{m-n}$ ;

- puterea unei puteri:  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ;

- puterea unui produs:  $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ ;

- puterea unui cât:  $(a : b)^n = a^n : b^n$ .

- **Ordinea efectuării operațiilor**

a) Dacă într-un exercițiu (sau în interiorul aceleiași acolade) sunt operații de același ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise (de la stânga la dreapta).

b) Dacă într-un exercițiu (sau în interiorul aceleiași acolade) sunt operații de ordine diferite, se efectuează întâi operațiile de ordinul al treilea, apoi operațiile de ordinul al doilea și apoi operațiile de ordinul întâi.

c) Dacă într-un exercițiu există și paranteze, se efectuează întâi toate operațiile din parantezele rotunde, apoi toate operațiile din parantezele pătrate, apoi toate operațiile din acolade și în final operațiile din afara acoladelor; parantezele pătrate se transformă în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate, iar parantezele rotunde inițiale dispar.

- **Reguli de calcul:**

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1) : 2 \text{ (suma lui Gauss), } n \in \mathbb{N}^*;$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1), n \in \mathbb{N}^*;$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Dacă avem un șir de numere  $(a_n)_{n \geq 1}$ , cu  $a_1$  dat, iar  $a_{n+1} = a_n + r$  (unde  $r$  este fixat), pentru orice  $n \geq 1$  avem:  $a_n = a_1 + (n - 1)r$  și  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n(a_1 + a_n) : 2$ .

## A.2. Numere întregi

- **Mulțimea numerelor întregi** este:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  sau  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$ .

Numerele întregi pozitive se identifică cu numerele naturale (dacă  $n \in \mathbb{N}^*$ , avem  $+n = n$ ):

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*.$$

Numerele întregi negative:  $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \dots\} = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .

Numerele întregi nenule:  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Avem  $+0 = -0 = 0$ .

- **Opusul numărului întreg  $n$**  este numărul întreg  $-n$ .

*Exemple:*  $-(+2) = -2$ ;  $-(-3) = 3$ .

- **Modulul unui număr întreg:**  $|n| = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ -n, & n < 0 \end{cases}$

*Proprietăți ale modulului numerelor întregi:*

1.  $|n| \geq 0$  pentru orice  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $|n| = 0 \Leftrightarrow n = 0$ ;

2.  $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}$ ;

3.  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

- **Scăderea numerelor întregi  $a, b$** , în această ordine, se definește ca  $a - b = a + (-b)$ .

- **Puterea unui număr întreg** ( $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ):

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{dacă } n = \text{par} \\ -a^n, & \text{dacă } n = \text{impar} \end{cases}, a, n \in \mathbb{N}^*; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$(-1)^n = \begin{cases} -1, & n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \\ 1, & n = 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

### A.3. Divizibilitatea numerelor întregi

#### A.3.1. Divizibilitatea numerelor naturale

- Numărul natural  $a$  este *divizibil* cu numărul natural  $b$ , dacă există numărul natural  $c$ , astfel încât  $a = b \cdot c$ .

Numărul  $a$  se numește *multiplu* al lui  $b$ , iar  $b$  se numește este *divizor* al lui  $a$ . Notăm  $b \mid a$  ( $b$  divide  $a$ ) sau  $a : b$  ( $a$  este divizibil cu  $b$ ).

#### Observații:

1. Dacă  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ , avem  $b \mid a \Leftrightarrow$  restul împărțirii lui  $a$  la  $b$  este 0.
  2.  $a \mid 0$  pentru orice  $a \in \mathbb{N}$ .
  3. 0 divide doar pe 0.
- Fie  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \geq 2$ . Numerele 1 și  $a$  se numesc *divizori improprii* ai numărului  $a$ . Cei-lalți divizori ai lui  $a$  (dacă există) se numesc *divizori proprii*.

Mulțimea divizorilor naturali ai lui  $a \in \mathbb{N}$  se notează  $D_a$ .

Mulțimea multiplilor naturali ai lui  $a \in \mathbb{N}$  se notează  $M_a$ .

Avem:  $D_a = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a\}$ ;  $D_0 = \mathbb{N}$ ;  $D_1 = \{1\}$ ;

$M_a = \{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m\}$ ;  $M_0 = \{0\}$ ;  $M_1 = \mathbb{N}$ ;  $M_n = \{kn \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

- Numărul natural  $p \geq 2$  se numește *prim* dacă singurii săi divizori sunt 1 și  $p$ .

Mulțimea numerelor prime este infinită (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...).

Singurul număr par și prim este 2.

Un număr natural nenul cu cel puțin trei divizori (adică cu cel puțin un divizor propriu) se numește *compus*.

Mulțimea numerelor compuse este infinită (4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, ...).

Pentru a verifica dacă un număr este prim procedăm astfel:

- împărțim pe rând numărul dat la numerele prime luate în ordine crescătoare până când câtul devine mai mic decât împărțitorul;
- dacă niciuna din împărțiri nu s-a efectuat exact (nu are restul 0), atunci numărul este prim;
- dacă la o împărțire restul este 0, numărul este compus, împărțitorul și câtul sunt divizori ai numărului.

# Capitolul 3

## MODELE DE Teste CU REZOLVARE COMPLETĂ

### TESTUL 1

#### SUBIECTUL I

*Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*

**(30 de puncte)**

**5p** 1. Cel mai mare divizor comun al numerelor 224 și 420 este:

- a) 14;                      b)  $2^2 \cdot 7$ ;                      c) 56;

d) 12.

*Soluție.*  $224 = 2^5 \cdot 7$ ;  $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow d = 2^2 \cdot 7 = 28$ .

**5p** 2. Cazurile pentru care valorile  $(x, y)$  din tabelul alăturat sunt invers proporționale sunt:

- a) I și II;                      b) I și IV;  
c) II și IV;                      d) III și IV.

	$x$	$y$
I	4	9
II	6	3
III	24	8
IV	18	36

*Soluție.*  $(x, y)$  i.p.  $(x', y') \Leftrightarrow xx' = yy'$ . Avem  $6 \cdot 18 = 3 \cdot 36 = 108$ .

**5p** 3. În tabelul de mai jos au fost înregistrate temperaturile minimă, respectiv maximă din cursul unei săptămâni.

ziua temperatura	luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică
minimă	$-2^\circ\text{C}$	$-3^\circ\text{C}$	$-1^\circ\text{C}$	$-3^\circ\text{C}$	$-4^\circ\text{C}$	$-1^\circ\text{C}$	$1^\circ\text{C}$
maximă	$10^\circ\text{C}$	$9^\circ\text{C}$	$14^\circ\text{C}$	$10^\circ\text{C}$	$8^\circ\text{C}$	$9^\circ\text{C}$	$9^\circ\text{C}$

Cea mai mare diferență dintre cele două temperaturi a fost înregistrată în cursul zilei de:

- a) miercuri;                      b) marți;  
c) luni sau joi;                      d) vineri sau sâmbătă.

*Soluție.*  $10 - (-2) = 12$ ;  $9 - (-3) = 12$ ;  $14 - (-1) = 15$ ;  $10 - (-3) = 13$ ;  $9 - (-1) = 10$ ;  $9 - 1 = 8 \Rightarrow$  diferența maximă este de  $15^\circ\text{C}$ .

**5p** 4. Ordinea descrescătoare a numerelor:  $a = 3,246$ ,  $b = 3,2(4)$ ,  $c = 3,24(6)$ ,  $d = 3,2(46)$  este:

- a)  $c, b, d, a$ ;                      b)  $d, c, b, a$ ;                      c)  $b, c, d, a$ ;                      d)  $c, d, a, b$ .

*Soluție.*  $a = 3,24600$ ,  $b = 3,2444\dots$ ,  $c = 3,24666\dots$ ,  $d = 3,24646\dots \Rightarrow c > d > a > b$ .

**5p** 5. Numărul perechilor  $(a, b)$  pentru care  $n = \sqrt{ab - ba}$  este număr natural este:

- a) 10;                      b) 22;                      c) 16;                      d) 13.

*Soluție.*  $n = \sqrt{9a - 9b} = 3\sqrt{a - b} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a - b \in \{0, 1, 4, 9\} \Rightarrow 9 + 8 + 5 = 22$  cazuri.

**5p** 6. Într-un an  $\overline{2abc}$ , cu  $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ , prima zi a unei luni cu număr par de zile este joi. Ultima zi a aceleiași luni este:

a) miercuri sau vineri;

b) marți sau joi;

c) luni sau sâmbătă;

d) marți sau miercuri.

*Soluție.* Studiind calendarul lunii respective (cu 30 de zile), redat în tabelul alăturat, observăm că ultima zi este vineri.

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

### SUBIECTUL al II-lea

*Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*

(30 de puncte)

**5p** 1. Numărul de triplete de puncte coliniare din figura alăturată este:

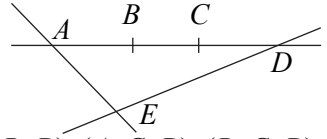
a) 4;

b) 5;

c) 6;

d) 7.

*Soluție.* Tripletele (fără permutări) sunt:  $(A, B, C)$ ,  $(A, B, D)$ ,  $(A, C, D)$ ,  $(B, C, D)$ , în număr de 4.



**5p** 2. Măsura unghiului făcut de acele unui ceas la ora 16:30 este de:

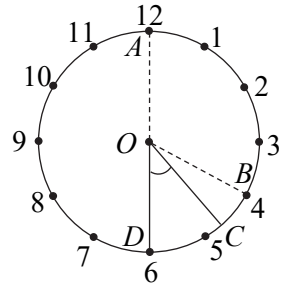
a)  $30^\circ$ ;

b)  $36^\circ$ ;

c)  $45^\circ$ ;

d)  $60^\circ$ .

*Soluție.* Acul minutar parcurge  $360^\circ$  în 60 de minute. În 30 de minute, el parcurge  $360^\circ : 2 = 180^\circ$  (din A în D). Acul orar parcurge  $360^\circ$  în 12 ore. În 30 de minute, el parcurge  $360^\circ : 12 = 15^\circ$  (de la B la C). Unghiul are  $30^\circ \cdot 2 - 15^\circ = 45^\circ$ .



**5p** 3. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC.

Știind că  $\sphericalangle BHC = 130^\circ$ ,  $\frac{\sphericalangle ABC}{6} = \frac{\sphericalangle ACB}{7}$ , măsura

unghiului B este:

a)  $45^\circ$ ;

b)  $60^\circ$ ;

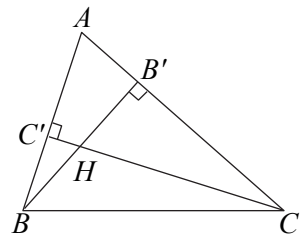
c)  $40^\circ$ ;

d)  $50^\circ$ .

*Soluție.* În patrulaterul  $AB'HC'$  avem  $130^\circ = \sphericalangle BHC =$

$= \sphericalangle B'HC' = 360^\circ - (80^\circ + 90^\circ + \sphericalangle A) = 180^\circ - \sphericalangle A \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle A = 50^\circ$ . Atunci  $\frac{\sphericalangle B}{6} = \frac{\sphericalangle C}{7} = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{13} = \frac{180^\circ - 50^\circ}{13} = 10^\circ \Rightarrow \sphericalangle B = 60^\circ$ .



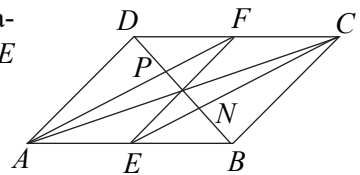
**5p** 4. Fie E și F mijloacele laturilor AB și CD ale paralelogramului ABCD, iar  $BD \cap AF = \{P\}$ ,  $BD \cap CE = \{N\}$ . Atunci avem:

a)  $DP = PN < BN$ ;

b)  $DP = BN < PN$ ;

c)  $DP + BN = \frac{3}{2}BN$ ;

d)  $DP = PN = BN$ .

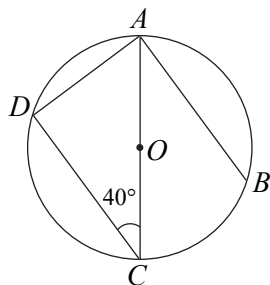


*Soluție.* Deoarece  $AE \parallel CF$ ,  $AE = CF$ , patrulaterul  $AECF$  este paralelogram și deci  $AF \parallel CN$ . Avem  $PF$  linie mijlocie în  $\triangle DCN$  și deci  $DP = PN$ . Analog, în  $\triangle ABP$  avem  $BN = PN$  și deci  $DP = PN = BN$ .

- 5p** 5. Pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  se iau în ordine punctele  $A, B, C, D$ , astfel încât  $AB \parallel CD$ ,  $O \in AC$ ,  $\sphericalangle OCD = 40^\circ$ . Măsura arcului  $\widehat{BAD}$  este de:

- a)  $120^\circ$ ;                      b)  $170^\circ$ ;  
c)  $180^\circ$ ;                      d)  $160^\circ$ .

*Soluție.*  $\sphericalangle ACD = 40^\circ$ ,  $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{AD} = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$ . Cum  $AC = 2R$ , avem  $\widehat{AB} + \widehat{BC} = 180^\circ$  și deci  $\widehat{AB} = 100^\circ$ . Atunci  $\widehat{BAD} = \widehat{AD} + \widehat{AB} = 100^\circ + 80^\circ = 180^\circ$ .

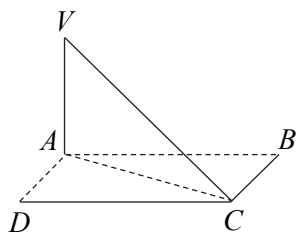


- 5p** 6. Dreapta  $VA$  este perpendiculară pe planul dreptunghiului  $ABCD$ . Știind că  $VA = 9$  cm,  $AB = 6\sqrt{2}$  cm,  $BC = 3$  cm, măsura unghiului făcut de dreapta  $CV$  cu planul  $(ABC)$  este:

- a)  $30^\circ$ ;                              b)  $45^\circ$ ;  
c)  $60^\circ$ ;                              d)  $75^\circ$ .

*Soluție.*  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 9$  cm;

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ACV = \frac{VA}{AC} = 1 \Rightarrow \sphericalangle ACV = 45^\circ.$$



### SUBIECTUL al III-lea

*Scris rezolvările complete.*

**(30 de puncte)**

1. Un mobil parcurge un drum dus-întors în 11 ore, astfel: la dus cu 50 km/h, iar la întors cu 60 km/h.

- 2p** a) Demonstrați că timpii la dus și întors, exprimați în ore, sunt numere invers proporționale cu două numere naturale.  
**3p** b) Determinați distanța parcursă de mobil.

*Soluție.* a) Notând cu  $d$  distanța (la dus sau la întors) și cu  $t_1$  și  $t_2$  timpii corespunzători, avem  $d = 50t_1 = 60t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{1} = \frac{t_2}{1} \Rightarrow (t_1, t_2)$  i.p.  $(5, 6)$ .

b)  $\frac{d}{50} + \frac{d}{60} = 11 \Rightarrow d = 300 \Rightarrow 2d = 600$  (km).

2. Fie expresiile  $E_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ,  $E_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ ,  $F(x) = \frac{E_1(x)}{E_2(x)}$ .

- 2p** a) Descompuneți în factori expresiile  $E_1$  și  $E_2$ .  
**3p** b) Determinați mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid F(x) \in \mathbb{Z}\}$ .

*Soluție.* a)  $E_1(x) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$ ,  
 $E_2(x) = x(x^2-1) + 2(x^2-1) = (x^2-1)(x+2) = (x+2)(x-1)(x+1)$ .

b)  $F(x) = \frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x+2}$  pentru  $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-2, \pm 1\}$ . Avem  $F(x) = \frac{x+2-4}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+2 \mid 2 \Rightarrow x+2 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow x \in \{-4, -3, -1, 0\}$ . Cum  $x \in D \Rightarrow A = \{-4, -3, 0\}$ .

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$ , iar  $A$  și  $B$  intersecțiile graficului funcției  $f$  cu axele  $Ox$ , respectiv  $Oy$ .

2p a) Determinați aria triunghiului  $AOB$ .

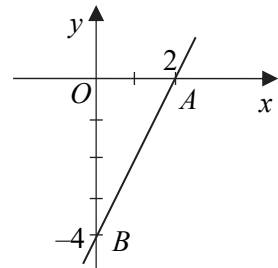
3p b) Determinați punctele  $M(x, y)$  cu proprietățile  $f(|x|) = -1 - |y|, x, y \in \mathbb{Z}$ .

*Soluție.* a)  $f(0) = -4 \Rightarrow B(0, -4)$ ;

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$ ;

$$\mathcal{A}_{AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4.$$

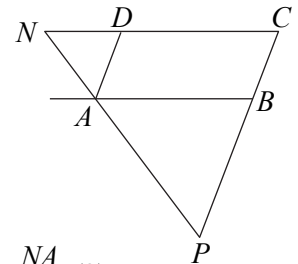
b)  $2|x| - 4 = -1 - |y| \Leftrightarrow |y| = 3 - 2|x| \Leftrightarrow (|x|, |y|) \in (0, 3), (1, 1) \Rightarrow$  punctele  $M_1(0, 3), M_2(0, -3), M_3(1, 1), M_4(1, -1), M_5(-1, 1), M_6(-1, -1)$ .



4. Prin vârful  $A$  al paralelogramului  $ABCD$  se duce o dreaptă care taie prelungirile laturilor  $BC$  și  $CD$  în  $P$  și  $N$ . Demonstrați că:

2p a)  $\frac{PB}{BC} \cdot \frac{ND}{DC} = 1$ ;

3p b)  $\frac{PC}{BC} + \frac{NC}{DC} \geq 4$ .



*Soluție.* a)  $AB \parallel CD \Rightarrow \frac{PB}{BC} = \frac{PA}{NA}$  (1);  $AD \parallel BC \Rightarrow \frac{ND}{CD} = \frac{NA}{PA}$  (2).

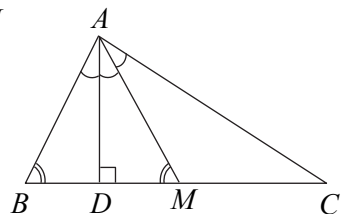
Din (1) și (2) rezultă  $\frac{PB}{BC} \cdot \frac{ND}{DC} = \frac{PA}{NA} \cdot \frac{NA}{PA} = 1$ .

b)  $\frac{PC}{BC} + \frac{NC}{DC} = \frac{PB+BC}{BC} + \frac{ND+DC}{DC} = \frac{PB}{BC} + \frac{ND}{DC} + 2 \stackrel{(1),(2)}{=} 2 + \left( \frac{PA}{NA} + \frac{NA}{PA} \right) \geq 2 + 2\sqrt{\frac{PA}{NA} \cdot \frac{NA}{PA}} = 4$ .

5. În triunghiul  $ABC$ , înălțimea  $AD$  și mediana  $AM$  împart unghiul  $BAC$  în trei unghiuri congruente. Demonstrați că:

2p a)  $BD = \frac{BC}{4}$ ;

3p b)  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ .



*Soluție.* a) În  $\triangle ABM$ ,  $AD$  este bisectoare și înălțime. Atunci  $\triangle ABM$  este isoscel și avem  $BD = DM = \frac{BC}{4}$ .

b) Cum  $AM$  este bisectoare în  $\triangle DAC$ , avem  $\frac{AD}{AC} = \frac{DM}{MC} = \frac{1}{2}$  și deci  $\sphericalangle C = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle DAC = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle DAM = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ .

6. Fie cubul  $ABCD A' B' C' D'$ .

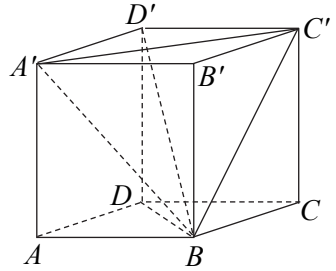
2p a) Determinați unghiul unei diagonale a cubului cu muchia cubului.

3p b) Determinați unghiul făcut de dreptele  $AC$  și  $BC$ .

*Soluție.* a) Fie  $a$  latura cubului. Luăm diagonala  $BD'$ . Orice muchie a cubului este paralelă cu una din muchiile  $BA$ ,  $BC$ ,  $BB'$ . Triunghiurile  $BAD'$ ,  $BB'D'$ ,  $BCD'$  sunt dreptunghice și congruente (cazul CI). Deci unghiurile făcute de diagonala  $BD'$  cu muchiile  $BA$ ,  $BC$ ,  $BB'$  sunt congruente. Luăm  $\triangle BAD'$ , cu  $AB = a$ ,  $AD' = a\sqrt{3}$ ,  $BD' = a\sqrt{3}$  și atunci

$$\cos(\sphericalangle ABD') = \frac{AB}{BD'} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sphericalangle ABD' = 60^\circ.$$

b) Cum  $A'C' \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(AC, BC') = \sphericalangle(A'C', BC')$ , iar  $\triangle A'C'B$  este echilateral, rezultă că unghiul cerut are măsura de  $60^\circ$ .



## TESTUL 2

### SUBIECTUL I

*Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*

(30 de puncte)

5p 1. Suma numerelor prime care divid numărul 660 este:

- a) 22;                      b) 27;                      c) 21;                      d) 23.

*Soluție.*  $660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ . Suma cerută este  $2 + 3 + 5 + 11 = 21$ .

5p 2. Suma numerelor impare  $\overline{ab}$  pentru care  $1 + 3 + 5 + \dots + (2a + b - 2) = 49$  este:

- a) 290;                      b) 265;                      c) 282;                      d) 275.

*Soluție.*  $49 = 2^7 \Rightarrow 2a + b - 2 = 2 \cdot 7 - 1 \Rightarrow 2a + b = 15 \Rightarrow \overline{ab} \in \{39, 47, 55, 63, 71\} \Rightarrow \text{suma} = 275$ .

5p 3. Fie mulțimile  $A = \left\{ \frac{3n+8}{3n+2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ ,  $B = \left\{ \frac{3k+2}{3k+1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Mulțimea  $A \cap B$  este:

- a)  $\emptyset$ ;                      b)  $\left\{ \frac{19}{11}, \frac{34}{11} \right\}$ ;                      c)  $\left\{ \frac{14}{13} \right\}$ ;                      d)  $\left\{ \frac{1014}{1011} \right\}$ .

*Soluție.*  $(3n+8)(3k+1) = (3n+2)(3k+2) \Leftrightarrow M3 + 8 = M3 + 4$  (imposibil)  $\Rightarrow \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ .

# Capitolul 4

## 40 DE MODELE DE TESTE PROPUSE

### TESTUL 1

#### SUBIECTUL I

1.  $360 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \Rightarrow (3+1)(2+1)(1+1) = 24$  divizori (c). *Teoremă:*  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$  descompunerea în factori primi distincți  $\Rightarrow m = (a_1+1)(a_2+1) \cdot \dots \cdot (a_{k+1}+1) =$  numărul divizorilor naturali ai lui  $n$ . 2.  $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow a = 2k, b = 3k, c = 4k \Rightarrow \frac{2k+3k+4k}{3} = 12 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow k^2 + k^2 + 4k^2 = 6k^2 = 96$  (b). 3.  $\frac{4 \cdot (-9) + 6 \cdot 7 + 10 \cdot (-5) + 11 \cdot 4}{4+6+10+11} = \frac{0}{31} = 0$  (b). 4.  $(a-b)(a+b) = 102 = (\pm 1) \cdot (\pm 2) \cdot (\pm 3) \cdot (\pm 17)$ . Cum  $a-b$  și  $a+b$  au aceeași paritate  $\Rightarrow 4 \mid a^2 - b^2$  (imposibil)  $\Rightarrow 0$  perechi (a). 5.  $\sqrt{(2,6+6,4)^2} = \sqrt{9^2} = 9$  (d). 6. Luăm  $a = 2 + \sqrt{3}, b = 2 - \sqrt{3}$  și  $a + b = 4$  (a).

#### SUBIECTUL al II-lea

1.  $AB = 2MB, AF = AB + BC + CD + DE + EF = 2MB + 2BC + 2CD = 2MD = 12$  cm (c). 2.  $360^\circ : 6 = 60^\circ$  (a). 3. În  $\triangle BAC$  și  $\triangle DEC$  se aplică teorema cu  $\sphericalangle BCA = 30^\circ \Rightarrow \frac{AB}{BC} + \frac{DE}{DC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  (d). 4. Din  $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow DC = 4 \Rightarrow DE$  linie mijlocie  $\Rightarrow AE = 5, DE = 5, \mathcal{P}_{ADE} = 14$  cm (b). 5.  $\sphericalangle BOC = 60^\circ \Rightarrow BC = l_6 = 4$  cm,  $AB = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$  cm  $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = 8\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> (c). 6.  $a^2 + b^2 + c^2 = (2\sqrt{29})^2 = 116; a + b + c = 72 : 4 = 18 \Rightarrow \mathcal{A} = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 208$  cm<sup>2</sup> (a).

#### SUBIECTUL al III-lea

1. a)  $7a = 2bc$ . Cum  $2 \mid 7a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow bc = 7 \Rightarrow 2$  triplete:  $(2, 1, 7), (2, 7, 1)$ ; b)  $b = 7 \Rightarrow a = 2c \Rightarrow 90 : 2 = 45$  triplete. 2. a)  $E(x) = x^2 + 7x + 2 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{41}{4} \geq -\frac{41}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$ ; b)  $S = (1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) + (1 + 2 + \dots + 10) + 20 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} + 20 = 790$ . 3. a)  $2a + a = a^2 - 4 \Rightarrow a \in \{-1, 4\}$ ; b)  $M(-2, 0), N(0, 4), P(2, 8); \mathcal{A}_{MOP} = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$  cm<sup>2</sup>. 4. a) Fie  $CE \perp AB, E \in AB$ . Avem  $AECD$  dreptunghi,  $\sphericalangle BEC = 90^\circ \Rightarrow AE = CD$ ; b) Cum  $CD = AM \Rightarrow \triangle AME$  dreptunghic isoscel  $\Rightarrow \sphericalangle AEM = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle BEN = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABC = 45^\circ$ . 5. a)  $\sphericalangle OCD = \sphericalangle COA = \sphericalangle COD \Rightarrow OC = OD$ ; b)  $\triangle BCD \sim \triangle BAO \Rightarrow \frac{CD}{AO} = \frac{BD}{BO} = \frac{BO - OD}{BO} = 1 - \frac{OC}{OB} \Rightarrow \frac{OC}{OA} = 1 - \frac{OC}{BO}$  (căci  $\triangle OCD$  este echilateral)  $\Rightarrow \frac{OC}{OA} + \frac{OC}{OB} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{OC}$ . 6. a)  $MB \perp (BCC')$ ;  $BN \perp CN, BN, CN \subset (BCC') \Rightarrow$

$\Rightarrow MN \perp NC \Rightarrow MN \perp D'N \Rightarrow MN \perp (NCD')$ ; b)  $\gamma = \frac{MN \cdot S}{3}$ ,  $S = \mathcal{A}_{D'NC}$ ;  $\Delta D'NC$

dreptunghic în  $N$ , cu  $D'N = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ ,  $NC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{a^3}{8}$ .

## TESTUL 2

### SUBIECTUL I

1.  $12 = 3 \cdot 4$ ;  $4 \mid n \Leftrightarrow 4 \mid \overline{4b} \Leftrightarrow b \in \{2, 4, 6\}$ ;  $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid 2a + 3b + 4 \Leftrightarrow 3 \mid 2a + 4$ . Pentru fiecare  $b$  se găsesc 3 valori pentru  $a \Rightarrow 3 \cdot 3 = 9$  cazuri (a). 2.  $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13 = (a - b)(a + b)$ . Cum  $a - b$ ,  $a + b$  au aceeași paritate și  $2 \mid (a + b)(a - b)$ , iar  $4 \nmid (a + b)(a - b)$ , nu avem soluții (b). 3.  $|a| + |b| \geq |a \pm b|$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| + |20 - x| \geq |x + 20 - x| = 20 > 18 \Rightarrow$  nu avem soluții (d). 4. Ordinea crescătoare:  $d, c, a, b$  (c).

5.  $a = \sqrt{\frac{2 \cdot 9}{2}} + \sqrt{\frac{50 \cdot 90}{5}} + \sqrt{\frac{800 \cdot 900}{8}} = 3 + 30 + 300 = 333$  (c). 6.  $2^{8x} = (2^4)^{16} = 2^{64} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 8 = 2^n \Rightarrow n \in \mathbb{N}^*$  (a).

### SUBIECTUL al II-lea

1. i)  $2 + 1 + 3 = 6$ ; ii)  $2 - 1 + 3 = 4$ ; iii)  $1 + 3 - 2 = 2$ ; iv)  $2 + 1 - 3 = 0$  (avem toate valorile) (d). 2.  $\sphericalangle AOC = x$ ,  $\sphericalangle COD = 2x$ ,  $\sphericalangle DOB = 3x$ ;  $6x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle COB =$

$= 150^\circ$  (d). 3.  $\Delta BAC \cong \Delta ACE$  (LUL)  $\Rightarrow BD = AE \Rightarrow \frac{AC}{AB} + \frac{BD}{AE} = 1 + 1 = 2$  (b). 4. Caz

general:  $D \in BC$ ,  $\frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}$ ,  $\mathcal{A}_{ABC} = S \Rightarrow \mathcal{A}_{ABD} = \frac{m}{m+n} \cdot S$ . Avem  $\mathcal{A}_{ABD} = \frac{h \cdot BD}{2} =$

$= \frac{h}{2} \cdot BC \cdot \frac{m}{m+n} = \frac{m}{m} \cdot S = \frac{2}{5} \cdot 30 = 12 \text{ cm}^2$  (c). 5.  $\sphericalangle ABI = 26^\circ \Rightarrow \sphericalangle B = 2 \cdot 26^\circ = 52^\circ$ ;

$\sphericalangle BIC = 180^\circ - (\sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB) = 180^\circ - \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle A}{2} = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle A = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle C = 180^\circ - (52^\circ + 60^\circ) = 68^\circ$  (b). 6. Fie  $AM \cap BC = \{D\}$ ,  $CM \cap AB = \{E\}$ . Avem  $OA \perp OB$ ,  $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ . Cum  $OM \perp (ABC) \Rightarrow OM \perp BC \Rightarrow BC \perp (OAM) \Rightarrow BC \perp CM$ . Analog  $AB \perp BC$  și deci  $M$  este ortocentrul  $\Delta ABC$  (a).

### SUBIECTUL al III-lea

1. a)  $a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{8+\sqrt{7}}}{\sqrt{7} + \sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{7}+1}{\sqrt{7} + \sqrt{5} + 2} = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b)  $|ma| \leq 4 \Leftrightarrow |m| \leq$

$\leq 4\sqrt{2} \Rightarrow A = \{\pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$ . 2. a)  $E(x) = \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{(x+2)(x^2-1)} + \frac{1}{x+1} \right) \cdot$

$\frac{x+1}{x^2} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x-1}$ ; b) Condiții:  $(x+2)(x-1)(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}^* \setminus$

$\setminus \{\pm 1\} = D$ ;  $\left| \frac{1}{x-1} \right| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow |x-1| \leq 3 \Rightarrow x \in [-2, 4]$ . Cum  $x \in D \Rightarrow x \in \{2, 3, 4\}$ .